Задачи по случайным процессам

1. Доказать, что множество $\cap_{J:u\in J}\overline{X(J\cap S,\omega)}$, о котором говорится в теореме 2.3.1, не является пустым.

2. В соответствии с определением 2.1.12 случайный процесс $X=\{X_t, t\geq 0\}$ со значением в $\mathbb{R}^d$ называется стохастически непрерывным, если он стохастически непререрывен справа и слева. Доказать, что случайный процесс X стохастически непрерывен тогда и только тогда, когда выполняется условие

$$\lim_{s\to t}\mathbb{P}\{\|S_s - X_t\| > \varepsilon\} = 0 \text{ для любых } \varepsilon > 0, t\geq 0.$$

3. Пусть процесс броуновского движения $B=\{B_t, t\geq 0\}$ определен на вероятностном пространстве $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$. Доказать, что для любых $0\leq s<t$ случайная величина $B_t - B_s$ не зависит от сигма-алгебры $\mathcal{F}_s=\sigma(B_v, 0\leq v\leq s)$.

4. Пусть процесс броуновского движения $B=\{B_t, t\geq 0\}$ определен на вероятностном пространстве $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$. Доказать, что для любого конечного марковского момента τ относительно естественной фильтрации броуновского движения случайный процесс $\{B_{\tau+t} - B_\tau, t\geq 0\}$ является процессом броуновского движения.

5. Пусть измеримый случайный процесс $X=\{X_t, t\geq 0\}$ и положительная случайная величина ξ определены на вероятностном пространстве $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$. Доказать, что суперпозиция X_ξ является случайной величиной.

6. Пусть даны вероятностное пространство $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$ и фильтрация $\mathbb{F}=\{\mathcal{F}_t, t\geq 0\}$. Доказать, что любой $\mathbb{F}$-марковский момент измерим относительно сигма- алгебры $\mathcal{F}_{\tau-}$. Пусть $\mathbb{F}$-марковские моменты $\tau_n, n\in\mathbb{N}$, возрастают и $\tau_n\uparrow\tau$. Доказать, что справедливо равенство $\mathcal{F}_{\tau-}=\sigma(\cup_{n=1}^{\infty}\mathcal{F}_{\tau_n})$.

7. Пусть процесс броуновского движения $B=\{B_t, t\geq 0\}$ определен на вероятностном пространстве $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$. Существует или нет предел

$$\lim_{t\to\infty}\frac{B_t}{t} \text{ п.в.}$$

Вычислить предел, если он существует.

8. Пусть пуассоновский процесс $\Pi=\{\Pi_t, t\geq 0\}$ определен на вероятностном пространстве $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$. Существует или нет предел

$$\lim_{t\to\infty}\frac{\Pi_t}{t} \text{ п.в.}$$

Вычислить предел, если он существует.

9. Пусть пуассоновский процесс $\Pi = \{\Pi_t, t \geq 0\}$ определен на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Доказать, что для любых $0 \leq s < t$ случайная величина $\Pi_t - \Pi_s$ не зависит от сигма-алгебры $\mathcal{F}_s = \sigma(\Pi_v, 0 \leq v \leq s)$.

10. Пусть процесс броуновского движения $B = \{B_t, t \geq 0\}$ определен на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Вычислить двумерные распределения процесса броуновского движения.

11. Пусть процесс броуновского движения $B = \{B_t, t \geq 0\}$ определен на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Обозначим $M_t = \sup_{0 \leq s \leq t} B_s$. Известно, что совместная протность вероятностей случайных величин M_t и B_t имеет вид

$$p_{M_t, B_t}(x, y) = \begin{cases} \frac{2(2x-y)}{\sqrt{2\pi t^3}} \exp\{-\frac{(2x-y)^2}{2t}\}, & \text{если } x \geq y \geq 0, \\ 0, & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Вычислить совместную плотность вероятностей случайных величин M_t и $M_t - B_t$.

12. Пусть процесс броуновского движения $B = \{B_t, t \geq 0\}$ определен на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Обозначим $M_t = \sup_{0 \leq s \leq t} B_s$. Известно, что совместная протность вероятностей случайных величин M_t и $M_t - B_t$ имеет вид

$$p_{M_t, M_t - B_t}(x, y) = \begin{cases} \frac{2(x+y)}{\sqrt{2\pi t^3}} \exp\{-\frac{(x+y)^2}{2t}\}, & \text{если } x, y \geq 0, \\ 0, & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Вычислить совместную плотность вероятностей случайных величин M_t и B_t.

13. Привести пример несепарабельного случайного процесса. Обладает ли свойством сепарабельности процесс броуновского движения?

14. Привести пример стохастически непрерывного случайного процесса, естественная фильтрация которого не обладает свойством непрерывности справа.

15. Пусть даны вероятностное пространство $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, фильтрация $\mathbb{F} = \{\mathcal{F}_t, t \geq 0\}$ и убывающая последовательность $\{\tau_n\}_{n \geq 1}$ марковских моментов относительно фильтрации $\mathbb{F}$. Если для любого $\omega \in \Omega$ существует $m = m(\omega) \in \mathbb{N}$ такое, что $\tau_n(\omega) = \tau_m(\omega)$ для всех $n \geq m$. Доказать, что функция $\tau = \lim_{n \to \infty} \tau$ является $\mathbb{F}$-марковским моментом.

16. Пусть даны вероятностное пространство $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ и фильтрация $\mathbb{F} = \{\mathcal{F}_t, t \geq 0\}$. Доказать, что любой $\mathbb{F}$-марковский момент τ измерим относительно сигма-алгебры $\mathcal{F}_{\tau-}$ и справедливо включение $\mathcal{F}_{\tau-} \subseteq \mathcal{F}_\tau$.

17. Пусть даны вероятностное пространство $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, фильтрация $\mathbb{F} = \{\mathcal{F}_t, t \geq 0\}$ и предсказуемый случайный процесс $X = \{X_t, t \geq 0\}$. Доказать, что для любого $\mathbb{F}$-марковскго момента функция $\mathbb{1}_{\{\tau < \infty\}} X_\tau$ измерима относительно сигма-алгебры $\mathcal{F}_{\tau-}$.

18. Пусть даны вероятностное пространство $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ и фильтрация $\mathbb{F} = \{\mathcal{F}_t, t \geq 0\}$. Доказать, что для любого $\mathbb{F}$-марковского момента τ и для любого множества $A \in \mathcal{F}_\tau$ функция $\tau_A = \tau \mathbb{1}_A + \infty \mathbb{1}_{A^c}$ является $\mathbb{F}$-марковским моментом.

19. Пусть нормальная случайная величина ξ определена на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Определим случайный процесс $X = \{X_t, t \geq 0\}, X_t = \xi t$, и фильтрацию $\mathbb{F} = \{\mathcal{F}_t, t \geq 0\}, \mathcal{F}_t = \sigma(X_s, 0 \leq s \leq t)$. Является ли момент первого попадания $\tau_A = \inf\{t \geq 0 : X_t > 0\}$ случайного процесса X в множество $A = (0, \infty)$ марковским моментом относительно фильтрации $\mathbb{F}$?

20. Пусть даны вероятностное пространство $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, фильтрация $\mathbb{F} = \{\mathcal{F}_t, t \geq 0\}$. и предсказуемый случайный процесс $X = \{X_t, t \geq 0\}$ с интегрируемой вариацией $V = \{V_t, t \geq 0\}$. Доказать, что V является предсказуемым процессом.

21. Пусть независимые случайные величины $\xi_n, n \in \mathbb{N}$, с общим экспоненциальным распределением с параметром $\lambda > 0$ определены на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Обозначим $\tau_0 = 0$ и $\tau_n = \xi_1 + \cdots + \xi_n$ для $n \geq 1$. Определим случайный процесс $\Pi = \{\Pi_t, t \geq 0\}, \Pi_t = \max\{n \geq 0 : \tau_n \leq t\}$. Вычислить двумерные распределения случайного процесса Π.

22. Пусть даны вероятностное пространство $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, фильтрация $\mathbb{F} = \{\mathcal{F}_t, t \geq 0\}$ и регулярный справа, $\mathbb{F}$-согласованный случайный процесс $X = \{X_t, t \geq 0\}$. Доказать, что случайный процесс $\Delta = \{\Delta_t, t \geq 0\}, \Delta_t = X_t - X_{t-}$, является прогрессивно измеримым.

23. Пусть даны вероятностное пространство $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ и фильтрация $\mathbb{F} = \{\mathcal{F}_t, t \geq 0\}$. Обозначим $\mathcal{X}$ множество $\mathbb{F}$-согласованных, регулярных справа случайных процессов $X = \{X_t, t \geq 0\}$. Доказать, что $\mathcal{F}_\tau = \sigma(X_\tau : X \in \mathcal{X}\}$.

24. Пусть даны вероятностное пространство $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ и фильтрация $\mathbb{F} = \{\mathcal{F}_t, t \geq 0\}$. Доказать, что для любых $\mathbb{F}$-марковских моментов τ и σ справедливы следующие утверждения

$$\{\tau \leq \sigma\}, \{\tau < \sigma\}, \{\sigma \leq \tau\}, \{\sigma < \tau\}, \{\tau = \sigma\} \in \mathcal{F}_{\tau-} \cap \mathcal{F}_{\sigma-},$$
$$\text{если } A \in \mathcal{F}_{\tau-}, \text{ то } A \cap \{\tau \leq \sigma\}, A \cap \{\tau < \sigma\}, A \cap \{\tau = \sigma\} \in \mathcal{F}_{\sigma-}.$$

25. Привести пример случайного процесса, который не обладает свойством равномерной интегрируемости.

26. Привести пример фильтрации, которая не обладает непрерывностью справа.

27. Доказать равенство

$$\{\tau \leq t\} = \{X_t = c\} \cup \left(\cap_{n=1}^{\infty} \cup_{s \in Q \cap [0,t)} \{X_s > c - 1/n\}\right)$$

из примера 3.7.3.

28. Доказать равенство (3.7.2).

29. Доказать, что класс множества $\mathcal{A}$ из теоремы 3.12.11, пункт (i), является счетной алгеброй.

30. Пусть даны независимые случайные величины $\xi_n, n = 1, 2, \ldots$ с общим эспоненциальным распределением с параметром $\lambda > 0$. Обозначим $\tau_0 = 0, \tau_n = \xi_1 + \cdots + \tau_n, n \geq 2, \Pi_t = \max\{n \geq 0 : \tau_n\}$. Вычислить вероятность $P\{\Pi_t = k\}$ для $k \geq 1$.

31. Пусть даны независимые случайные величины $\xi_n, n = 1, 2, \dots$ с общим эспоненциальным распределением с параметром $\lambda > 0$. Обозначим $\tau_0 = 0, \tau_n = \xi_1 + \dots + \tau_n, n \geq 2, \Pi_t = \max\{n \geq 0 : \tau_n\}, t \geq 0$. Вычислить вероятность $P\{\Pi_s = k, \Pi_t = k + m\}$ для любых целых m, n и для любых $0 \leq s < t$.

32. Пусть дан процесс броуновского движения $B = \{B_t, t \geq 0\}$. Обозначим $M_t = \max_{0 \leq s \leq t} B_s$. Доказать, что $P\{B_t < x, B_t < y\} = 0$, если $x \leq 0, y \in \mathbb{R}$.

33. Пусть дан процесс броуновского движения $B = \{B_t, t \geq 0\}$. Обозначим $M_t = \max_{0 \leq s \leq t} B_s$. Доказать, что $P\{B_t < x, B_t < y\} = P\{M_t < x\}$, если $0 < x \leq y$.

34. Пусть дан стандартный пуассоновский процесс $\Pi = \{\Pi_t, t \geq 0\}$ с параметром $\lambda > 0$. Обозначим τ_1 и τ_2 первый и второй скачок пуассоноского процесса. Доказать, что случайные величины τ_1 и $\tau_2 - \tau_1$ независимы.

35. Пусть дан стандартный пуассоновский процесс $\Pi = \{\Pi_t, t \geq 0\}$ с параметром $\lambda > 0$. Обозначим τ_1 и τ_2 первый и второй скачок пуассоноского процесса. Доказать, что случайные величины τ_1 и $\tau_2 - \tau_1$ имеют общее экспоненциальное распределение с параметром λ.

36. Пусть дан процесс броуновского движения $B = \{B_t, t \geq 0\}$. Вычислить совместную плотность вероятностей $p_{s,t}(x, y), x, y \in \mathbb{R}$, для любых $0 \leq s < t$.

37. Пусть дан процесс броуновского движения $B = \{B_t, t \geq 0\}$. Доказать, что $\{tB_{1/t}, t \geq 0\}$, где $tB_{1/t} = 0$, если $t = 0$, является процессом броуновского движения.